MATEMÁTICA - VESTIBULAR 2004 - 2ª ETAPA

QUESTÃO 01

a) O primeiro gráfico mostra o percentual de universitários do sexo masculino, no Brasil, que é de 44%. Logo, o percentual de universitários do sexo feminino, no Brasil, é 100% – 44% = 56%. (valor: 1,0 ponto)

b) O ângulo central do terceiro gráfico, que corresponde ao percentual de universitários que estudam em instituições de ensino superior públicas é 360º - 248,4º = 111,6º. Assim, através de regra de três, obtemos: (valor: 2,0 pontos)

360º — 100%

111,6º — x%

$\Rightarrow$ 360 x = 100 . 111,6 $\Rightarrow$ x = 1116/36 $\Rightarrow$ x = 31%. Logo, o percentual de universitários que estudam em instituições de ensino superior públicas é de 31%.

c) Sim, pois o percentual de universitários do sexo feminino, no Brasil (56%), é maior que o percentual de universitários do sexo masculino (44%). (valor: 1,0 ponto)

d) Não, por insuficiência de dados. (valor: 1,0 ponto)

QUESTÃO 02

a) Seja S a soma das raízes.
Pela relação de Girard, temos: S = - b/a, onde a = 1 e b = - 2k. Assim S = - (- 2k)/1 = 2k (valor: 1,0 ponto)

b) Seja P o produto das raízes.
Pela relação de Girard, temos P = c/a, conde a = 1 e c = $k^2 + k$. Assim P = $(k^2 + k)/1 = k^2 + k$ (valor: 1,0 ponto)

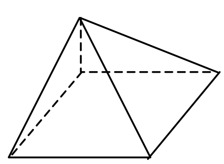
c) Sejam $x_1 = \operatorname{sen}\alpha$ e $x_2 = \cos\alpha$ as raízes da equação $x^2 - 2kx + k^2 + k = 0$
Do item a), temos $(x_1 + x_2)^2 = (2k)^2 \Rightarrow x_1^2 + 2\,x_1\,x_2 + x_2^2 = 4k^2$
Da trigonometria, temos que $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 1$
Do item b), temos $x_1^2\, x_2^2 = k^2 + k$
Portanto,

$$1 + 2\left(k^2 + k\right) = 4k^2 \Rightarrow 2k^2 - 2k - 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

Sendo k < 0, temos que $K = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$. (valor: 3,0 ponto)

QUESTÃO 03

a)



(valor: 0,2 ponto)

b) Como a base da pirâmide é um quadrado de perímetro 20 cm, temos que o comprimento ℓ dos lados do quadrado satisfaz $4\ell = 20$, ou seja, $\ell = 5$ cm.
Como um dos lados de cada triângulo é também lado do quadrado e os triângulos são equiláteros, segue que os lados dos triângulos medem 5 cm. (valor: 0,6 ponto)

c) $S = \ell^2 \Rightarrow S = 5^2 \Rightarrow S = 25\ \text{cm}^2$ (valor: 0,6 ponto)

d) Seja d a diagonal da base. Então, $d = \ell\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ cm.
Como a pirâmide é regular, a projeção ortogonal de seu vértice sobre a base é o centro do quadrado. Obtemos, então, um triângulo retângulo de catetos H (altura da pirâmide) e d/2 e de hipotenusa ℓ. Aplicando o Teorema de Pitágoras, obtemos:

$$\lambda^2 = H^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \Rightarrow 5^2 = H^2 + \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow H = \frac{5\sqrt{2}}{2}\ \text{cm}$$

(valor: 2,4 pontos)

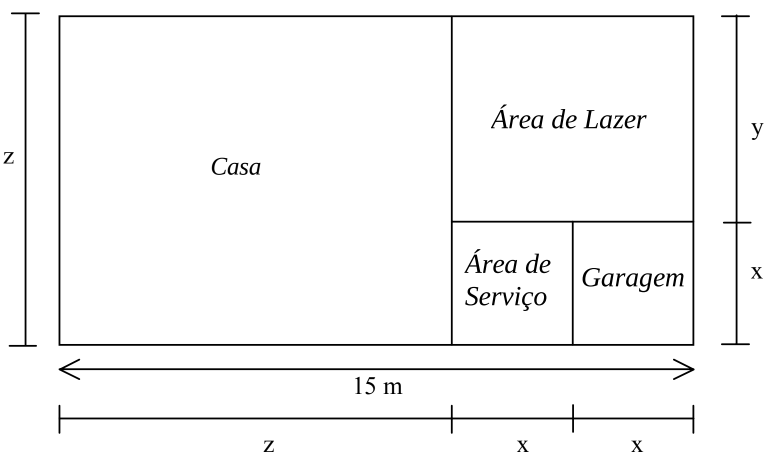
e) Dos itens c) e d) obtemos:

$$V = \frac{SH}{3} = \frac{25\,\frac{5\sqrt{2}}{2}}{3} = \frac{125\sqrt{2}}{6}.$$ Logo, o volume da pirâmide a ser montada é $\frac{125\sqrt{2}}{6}\ \text{cm}^3$.

(valor: 0,6 ponto)

f) Paulo não atendeu às especificações dadas por sua professora, pois a pirâmide que ele montou possui volume menor que 42 cm^3. (valor: 0,6 ponto)

QUESTÃO 04



Da figura, obtemos:

$$\left.\begin{aligned} y &= 2x \\ z &= x + y = 3x \\ z &= 15 - 2x \end{aligned}\right\} \Rightarrow 3x = 15 - 2x \Rightarrow 5x = 15 \Rightarrow x = 3$$

$z = 3x = 9$.
Portanto, a largura do terreno é de 9 m.

(valor: 5,0 pontos)

QUESTÃO 05

Sejam x, y e z os números de pontos que cada jogador faz ao acertar um tiro, respectivamente, nas regiões A, B e C.

Assim, $y = \frac{x}{2}$ e $z = \frac{y}{5}$, o que implica $y = \frac{x}{2}$ e $z = \frac{x}{10}$.

Logo, pela jogada de Carlos, obtemos:

$$5x + 2y + 2z = 62 \Rightarrow 5x + 2.\frac{x}{2} + 2.\frac{x}{10} = 62 \Rightarrow 5x + x + \frac{x}{5} = 62 \Rightarrow 31x = 310 \Rightarrow x = 10.$$

Sendo x = 10, temos que y = 5 e z = 1.

Portanto, Pedro fez $8.10 + 3.5 + 2.1 = 97$ pontos.

(valor: 5,0 pontos)

QUESTÃO 06

a) A equação da reta r que passa pelos pontos A = (0, 1) e B = (-4, -3) é dada por: $y - 1 = \dfrac{-3-1}{-4-0}(x-0)$, ou seja, $y = x + 1$. (valor: 1,5 pontos)

b) A equação da circunferência de centro no ponto C = (3, 2) e raio igual a 2 é dada por: $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$, ou seja, $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$. (valor: 1,0 ponto)

c) Os pontos da reta r, cuja distância ao ponto C é igual a 2, correspondem à interseção da reta r com a circunferência obtida na letra b.
Logo, resolvendo o sistema $\begin{cases} y = x + 1 \\ (x-3)^2 + (y-2)^2 = 4 \end{cases}$ obtemos: x = 1 e y = 2 ou x = 3 e y = 4.
Portanto, os pontos são (1, 2) e (3, 4). (valor: 2,5 pontos)