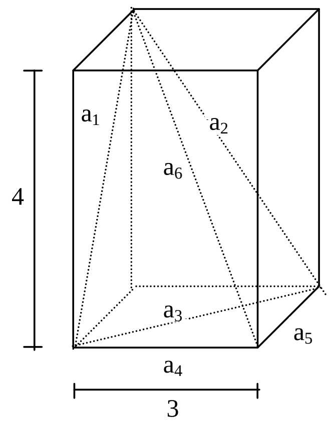
MATEMÁTICA - 2ª ETAPA do VESTIBULAR 2006 - REFERÊNCIAS PARA CORREÇÃO

Questão 01



A pirâmide possui 6 (seis) arestas (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 e a_6)

a_1 e a_2: diagonais de duas faces laterais do prisma

$a_1^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow a_1 = 5$ $\quad$ $a_2^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow a_2 = 5$ $\quad$ Valor: 1,0 ponto

a_3: diagonal da base do prisma $\quad a_3^2 = 3^2 + 3^2 = 18 \Rightarrow a_3 = 3\sqrt{2}$ $\quad$ Valor: 1,0 ponto

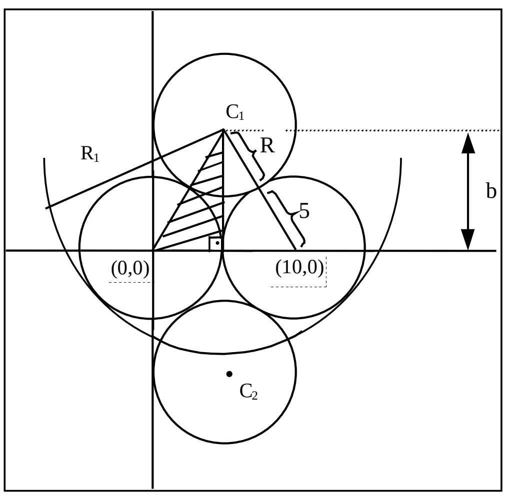
a_4 e a_5: lados da base do prisma $\quad a_4 = a_5 = 3$ $\quad$ Valor: 0,5 ponto

a_6: diagonal do prisma $\quad a_6^2 = 4^2 + a_3^2 = 16 + 18 = 34 \Rightarrow a_6 = \sqrt{34}$ $\quad$ Valor: 1,0 ponto

Soma do comprimento das arestas:

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 5 + 5 + 3\sqrt{2} + 3 + 3 + \sqrt{34} = 16 + 3\sqrt{2} + \sqrt{34}$ $\quad$ Valor: 1,5 ponto

Questão 02



Centro e raio das circunferências dadas:
a) $x^2 + y^2 = 25$ $\quad$ centro: (0,0) e raio: 5

b) $(x - 10)^2 + y^2 = 25$ $\quad$ centro: (10,0) e raio: 5

Valor: 1,0 ponto

Considere a circunferência de centro $C_1 = (5,b)$, com a coordenada $b > 0$.

Como o triângulo formado pelos vértices (0,0), (10,0) e C_1 é equilátero e denotando por R o raio da circunferência de centro C_1, temos que:
$10 = 5 + R$, logo, $R = 5$.

Como o triângulo (0,0), (5,0) e C_1 é retângulo, temos que:
$(R + 5)^2 = 5^2 + b^2$. Assim,
$10^2 = 5^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{75}$, observando que b é positivo.

Valor: 2,0 pontos

Observe que existe outra circunferência de centro: $C_1 = (5, \sqrt{75})$ tangente às circunferências dadas que possui raio $R_1 = 15$.

Logo, as equações das duas primeiras circunferências obtidas são:
$(x - 5)^2 + (y - \sqrt{75})^2 = 5^2$ e $(x - 5)^2 + (y - \sqrt{75})^2 = 15^2$

Valor: 1,0 ponto

Observando que o problema é simétrico em relação ao eixo dos x, obtemos mais duas circunferências tangentes com centro em $C_2 = (5, -\sqrt{75})$, dadas por:
$(x - 5)^2 + (y + \sqrt{75})^2 = 5^2$ e $(x - 5)^2 + (y + \sqrt{75})^2 = 15^2$

Valor: 1,0 ponto

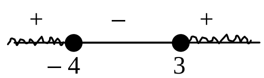
Questão 03

a) A área da placa é dada por: $A(x) = (x + 3)(2x - 4) = 2x^2 + 2x - 12$

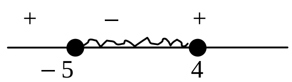
Então, devemos ter: $12 \leq 2x^2 + 2x - 12 \leq 28$

Valor: 1,0 ponto

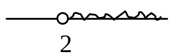
I) $2x^2 + 2x - 12 \geq 12 \;\Rightarrow\; 2x^2 + 2x - 12 = 12 \;\Rightarrow\; 2x^2 + 2x - 24 = 0 \;\Rightarrow\; x = 3$ ou $x = -4$



II) $2x^2 + 2x - 12 \leq 28 \;\Rightarrow\; 2x^2 + 2x - 12 = 28 \;\Rightarrow\; 2x^2 + 2x - 40 = 0 \;\Rightarrow\; x = -5$ ou $x = 4$



C.E.) Condição de existência: $x + 3 > 0$ e $2x - 4 > 0 \;\Rightarrow\; x > -3$ e $x > 2$. Logo $x > 2$



Valor: 2,0 pontos

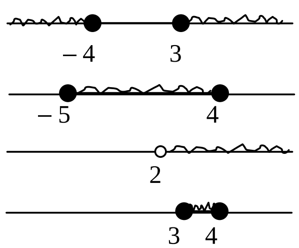
Os valores de x procurados estão na interseção entre I, II e C.E.:

I)

II)

C.E.)

$I \cap II \cap C.E.$



$S = \{x \in \Re \mid 3 \leq x \leq 4\}$

Valor: 1,0 ponto

b) Para a placa de 28 m^2, temos:

$(x + 3)(2x - 4) = 28 \;\Rightarrow\; 2x^2 + 2x - 12 = 28 \;\Rightarrow\; 2x^2 + 2x - 40 = 0$

$\Rightarrow\; x = 4$ ou $x = -5$ (não serve, pois não atende à condição de existência)

Para $x = 4$:

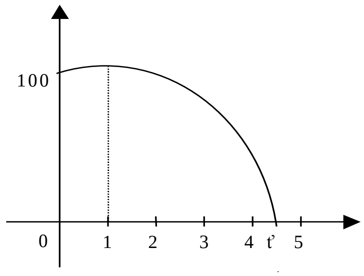
$x + 3 = 4 + 3 = 7$ e, então, dois dos lados da placa retangular medem 7 m

$2x - 4 = 2 . 4 - 4 = 4$ e, então, os outros dois lados da placa retangular medem 4 m

Valor: 1,0 ponto

Questão 04

a)



$f(t) = -10\,t^2 + 20\,t + 100$ é uma função quadrática com concavidade voltada para baixo. Logo, a população cresce até o tempo dado por:

$$t = -\frac{b}{2a} = -\frac{20}{-20} = 1$$

isto é, até 1 semana após a aplicação do pesticida

Valor: 2,0 pontos

b) $f(0) = 100 \;\rightarrow$ população inicial

$-10\,t^2 + 20\,t + 100 = 100 \;\Rightarrow\; 10\,t^2 - 20\,t = 10\,t\,(t-2) = 0 \;\Rightarrow\; t = 0$ ou $t = 2$

Portanto, após duas semanas a população de insetos será igual à inicial

Valor: 1,5 ponto

c) $f(t) = 0 \;\Rightarrow\; -10\,t^2 + 20\,t + 100 = 0 \;\Rightarrow\; t^2 - 2\,t - 10 = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4\,.\,1\,.\,(-10) = 44$

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{44}}{2.1} = \frac{2 \pm 2\sqrt{11}}{2} = 1 \pm \sqrt{11} \Rightarrow t = 1 - \sqrt{11} < 0 \quad \text{ou} \quad t' = 1 + \sqrt{11}$$

$t' = 1 + \sqrt{11}$ é o tempo para a população ser exterminada.

Como $3 = \sqrt{9} < \sqrt{11} < \sqrt{16} = 4$ segue que $4 < t' < 5$. A população será exterminada na quinta semana.

Valor: 1,5 ponto

Questão 05

Interpretar o enunciado da questão e obter a equação $C_{n,2} = 15 \;\Rightarrow\; \dfrac{n!}{2!(n-2)!} = 15$

Valor: 1,0 ponto

Desenvolver a expressão acima, obtendo a equação $n^2 - n - 30 = 0$

Valor: 3,0 pontos

Resolver a equação acima, obtendo $n_1 = 6$ ou $n_2 = -5 < 0$.
Descartar a solução n_2 e a resposta será: 6 ministros (com o desenvolvimento pertinente).

Valor: 1,0 ponto

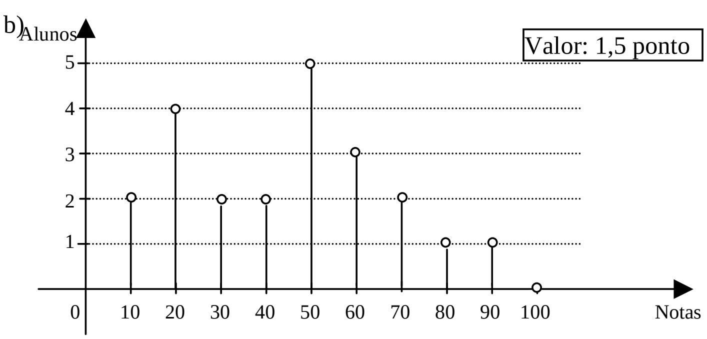
Questão 06

a) tabulando:

$10 \rightarrow 2$
$20 \rightarrow 4$
$30 \rightarrow 2$
$40 \rightarrow 2$
$50 \rightarrow 5 \quad \leftarrow$ moda: nota 50
$60 \rightarrow 3$
$70 \rightarrow 2 \qquad f_r = \dfrac{5}{22} \cong 22{,}7\%$
$80 \rightarrow 1$
$90 \rightarrow \underline{1}$
$\quad\;\; 22$

Valor: 1,5 ponto

b)



Valor: 1,5 ponto

c) rol $\rightarrow$ 30 50 $\underbrace{50 \quad 70}$ 80 90

mediana = (50 + 70)/2 = 60

Valor: 2,0 pontos