MATEMÁTICA – 2ª ETAPA DO VESTIBULAR 2007
REFERÊNCIAS PARA CORREÇÃO

Questão 01
a) ***[2,0 pontos]***
Estabelecer a equivalência: *f* admite raízes reais $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$
Obter a inequação: $b^2 - 48 \geq 0$.
Resolver a inequação e obter:

$$\boxed{b \leq -4\sqrt{3} \text{ ou } b \geq 4\sqrt{3}} \text{ ou } \boxed{b \in \left]-\infty, -4\sqrt{3}\right] \cup \left[4\sqrt{3}, +\infty\right[}.$$

b) ***[3,0 pontos]***
Obter a medida do segmento *AB*, utilizando a informação da área do triângulo *ABC*: $AB = 2$.

Relacionar a medida do segmento AB com o parâmetro b: $AB = \dfrac{\sqrt{b^2 - 48}}{2}$.

Resolver a equação: $2 = \dfrac{\sqrt{b^2 - 48}}{2}$ e obter $b = \pm 8$.

Descartar a possibilidade de b ser negativo e concluir que $\boxed{b = 8}$.

Questão 02
a) ***[2,5 pontos]***

Estabelecer a inequação $\cos x \geq -\dfrac{1}{2}$.

Resolver a inequação obtendo $\boxed{\left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \dfrac{2\pi}{3} \text{ ou } \dfrac{4\pi}{3} \leq x \leq 2\pi\right\}}$ ou $\boxed{x \in \left[0, \dfrac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{4\pi}{3}, 2\pi\right]}$

b) ***[1,5 ponto]***
Definir $h:[0,\pi] \to \mathbb{R}$ onde $h(x) = f(g(x)) = f(2x) = 2 + \cos(2x)$.

c) ***[1,0 ponto]***

$$h(x) = 2 + \cos 2x = 2 + \left(\cos^2 x - sen^2 x\right) = 2 + \left(1 - sen^2 x - sen^2 x\right) = 3 - 2sen^2 x$$

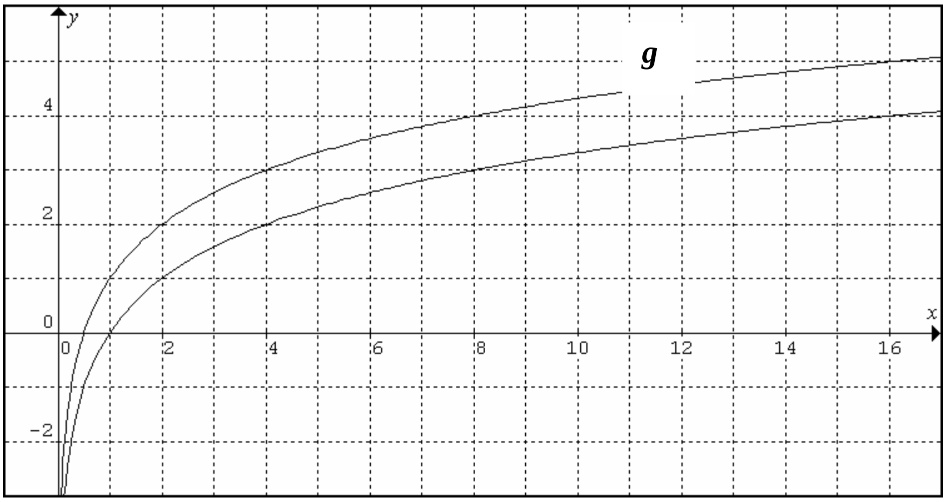
Questão 03
a) ***[3,5 pontos]***

Utilizar o fato do gráfico da função *f* passar pelos pontos $(2,2)$ e $(3,4)$ e obter: $k = \dfrac{1}{2}$

Estabelecer a função $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^*_+$ com $f(x) = \dfrac{1}{2} 2^x = 2^{x-1}$.

Obter a inversa : $\boxed{f^{-1}:\mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R} \text{ onde } f^{-1}(x) = \log_2(2x)}$

b) ***[1,5 ponto]***



Questão 04

a) ***[1,0 ponto]***

Calcular a altura h utilizando os dados da área do paralelogramo ABCD e a medida de sua base, obtendo $\boxed{h = 3\ \text{cm}}$.

b) ***[4,0 pontos]***

Concluir a semelhança entre os triângulos ΔAEB e ΔCEM.

Utilizar a proporção entre os lados dos triângulos ΔAEB e ΔCEM e obter a relação: $h_{AEB} = 2h_{CEM}$, onde h_{AEB} e h_{CEM} são as alturas destes triângulos em relação aos lados AB e MC respectivamente.

Concluir que $h_{CEM} = 1$ cm.

Obter a área do triângulo ΔCEM : $S_{CEM} = 2$ cm².

Calcular $S_{AEMD} = \frac{1}{2} S_{ABCD} - S_{CEM}$, obtendo $\boxed{S_{AEMD} = 10\ \text{cm}^2}$.

Questão 05

a) ***[3,5 pontos]***

Obter as raízes inteiras do polinômio $p(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x - 12$ que são -1 e 3.

Concluir que $p(x)$ se fatora como $p(x) = (x+1)(x-3)(x^2+4)$.

Obter as raízes do polinômio $q(x) = x^2 + 4$, que são: $\pm 2i$.

Escrever o polinômio $p(x)$ como produto de polinômios de grau 1 como:

$$\boxed{p(x) = (x+1)(x-3)(x+2i)(x-2i)}$$

b) ***[1,5 ponto]***

Argumentar que a soma das raízes de um polinômio da forma $p(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + mx + n$ tem que ser igual a 2 e que, por outro lado, para que as raízes sejam inteiras positivas, sua soma deve ser no mínimo igual a 4.

Concluir assim a **<u>não</u>** existência de valores m e n para os quais o polinômio p possua quatro raízes inteiras e positivas.

6)

a) ***[3,0 pontos]***

Obter o centro da circunferência $\lambda:\ C(2,3)$.

Obter o coeficiente angular da reta s perpendicular à reta r: $m_s = 1$.

Equacionar a reta s a partir de um ponto de passagem e de seu coeficiente angular, obtendo:

$$\boxed{s: x - y = -1}.$$

b) ***[2,0 pontos]***

Obter o raio da circunferência concêntrica à circunferência λ utilizando distância de ponto a reta:

$$R = \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

Equacionar a circunferência pedida conhecendo-se seu centro $C(2,3)$ e seu raio $R = \frac{5}{\sqrt{2}}$, obtendo:

$$\boxed{(x-2)^2 + (y-3)^2 = \frac{25}{2}}.$$